

Развитие численного метода оптимального управления связанной марковской цепью

Степанян К.В.
ИППИ РАН
KVStepanyan@iitp.ru

Миллер Б.М.
ИППИ РАН
bmiller@iitp.ru

Миллер А.Б. *
ИППИ РАН
amiller@iitp.ru

Попов А.К.
ИППИ РАН
ap@iitp.ru

Аннотация

В цикле наших недавних работ рассматривалась задача управления связанными марковскими цепями. Для нахождения оптимального управления необходимо найти решение набора¹ уравнений динамического программирования. В силу специфики задачи эти уравнения содержали операцию минимизации в правой части, которую необходимо выполнять на каждом шаге интегрирования для каждого состояния системы. Для примера системы трех водохранилищ найден аналитический ответ, что существенно снижает вычислительную сложность.

Еще одной особенностью рассматриваемой постановки является наличие нелинейных невыпуклых ограничений на множество управлений. При этом построение выпуклой оболочки этого множества неприменимо, поэтому задача нахождения аналитического ответа является актуальной.

1. Введение

Задачи, описываемые марковскими цепями известны давно и применяются в различных областях. Оптимизация управляемых марковских процессов с непрерывным временем и конечным множеством состояний представляет собой интенсивно развивающуюся область стохастического оптимального управления [1, 2, 3, 4, 5]. Такие модели используются при решении широкого круга задач, например, в задачах распределения ресурсов [6, 7], в моделях распространения и локализации эпидемий [8].

Различные постановки задач управления запасами воды в водохранилищах с использованием моделей на основе марковских цепей присутствуют в работах [9, 10, 11]. Уровень воды подвержен дей-

ствию сезонных и климатических факторов (дожди, испарение), на него влияют сезонные требования потребителей. Так как рассматривается система из нескольких связанных водохранилищ, то могут появиться управляемые потоки между соседними водохранилищами. В зависимости от запасов воды могут вводиться ограничения на потребление, применяться методы ценового регулирования, что, в свою очередь, может сказываться на поведении потребителей и объемах потребления [10]. Каждое водохранилище, независимо от остальных, имеет свои характеристики. Текущий уровень воды определяется предысторией, пополнение из-за осадков и потери из-за испарения зависят, например, от площади водохранилища. Расход воды потребителями также свой у каждого водохранилища. Соответствующие потоки используются при построении генератора марковской цепи.

Общий подход к решению такого типа задач основывается на сведении задачи стохастического управления нелинейной нестационарной системой к задаче детерминированного управления с интегральными и терминальными критериями качества. Последняя решается численно с применением метода динамического программирования. Для данного класса задач получается набор обыкновенных дифференциальных уравнений, представимых в тензорной форме.

При описании системы водохранилищ количество возможных состояний системы растет мультипликативно, поскольку растет размерность вектора состояния. Вместо матрицы, описывающей одно водохранилище, появляется тензор соответствующего ранга, описывающий систему в целом.

Многие из существующих программных средств не справляются с задачей численного интегрирования, поскольку пытаются построить тензор целиком и разместить в памяти, что не является необходимым, поскольку в правую часть входит не сам тензор, а его свертки.

Очевидно, что уровень воды не может изменяться мгновенно. Следовательно, с точки зрения мар-

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 16-31-60049

¹в данной работе будем использовать термин набор вместо системы для уравнений динамического программирования чтобы избежать путаницы с системой водохранилищ

ковской цепи, возможны переходы только к двум соседним состояниям, а значит, что генератор марковской цепи представляет собой сильно разреженную матрицу. Эта особенность была учтена и использована. В работах [12, 13] была описана реализованная подсистема, строящая полный набор уравнений динамического программирования, который будет приведен ниже (3).

Модели, аналогичные системам связанных водохранилищ, возникают в задачах управления потоками данных в Интернете [14, 15, 16, 17, 18] и системах массового обслуживания [19, 20, 21] с управлением скоростью обслуживания и буферизацией.

2. Постановка задачи

Постановка задачи и вывод набора уравнений динамического программирования с доказательствами опубликован в [22]. Приведем основные обозначения, которыми будем пользоваться и в настоящей работе.

Объем воды в l -м водохранилище может быть дискретизован на N^l по уровню [23]. Состояние описывается марковской цепью $X_t^l \in \mathcal{S}^l = \{e_0, \dots, e_{N^l}\}$ с генератором $A^l(t, u)$, представляющим собой матрицу размера $(N^l + 1) \times (N^l + 1)$. Система водохранилищ описывается связанной управляемой марковской цепью $\mathbf{X} = \{X^1 | X^2 | \dots | X^d\}$. Общая теория связанных управляемых марковских цепей изложена в работах [24, 25].

Водохранилища могут пополняться в результате выпадения осадков. Интенсивность сезонных входящих потоков описывается функциями $\lambda^l(t)$. Расход воды происходит как в силу естественного испарения, так и из-за потребления. Эти потоки описываются интенсивностями $\mu^l(t)$ и $w^l(t)$ соответственно и тоже зависят от сезона.

Данный подход был применен к системе, состоящей из трех водохранилищ ($d = 3$), изображенных на рис. 1. Некоторые из них связаны между собой водопроводами, возможность передачи воды между ними отображена стрелками. Интенсивность управляемой передачи воды из m -го водохранилища в n -е в момент времени t описывается $u_{ijk}^{mn}(t)$.

Следует отметить, что данное управление не является описанием потока воды в физическом смысле, а описывает изменение вероятностей, которое не может быть отрицательным, отсюда и два различных управления для каждого направления возможной передачи воды.

Целью оптимизации является приведение систему в целом к некоторому сбалансированному состоянию с помощью управляемой передачи воды между водохранилищами. Критерий представляет собой квадратичный штраф за отклонение от этого желаемого состояния с весовыми коэффициентами для

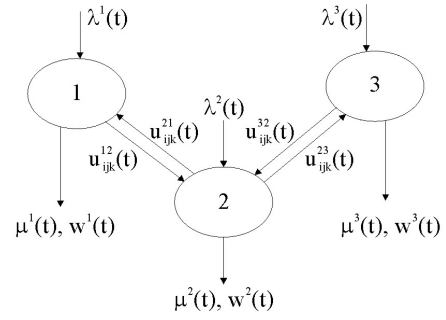


Рис. 1. Схема потоков системы связанных водохранилищ в рассматриваемом примере

каждого водохранилища [22].

Эта интенсивность зависит не только от времени и номера водохранилища, но и от вектора состояния системы в целом $X^1 = i, X^2 = j, X^3 = k$. Кроме того, должны выполняться равномерные ограничения на пропускную способность водопроводов

$$0 \leq u_{ijk}^{mn}(t) \leq u_{max}^{mn}, \forall \{i, j, k\}, \forall t. \quad (1)$$

Пропускная способность не зависит от направления потока, следовательно должно выполняться

$$u_{max}^{mn} = u_{max}^{nm} > 0.$$

Одновременных встречных потоков воды в одном водопроводе также надо избегать, что приводит к ограничениям

$$u_{ijk}^{mn}(t) * u_{ijk}^{nm}(t) = 0. \quad (2)$$

Ограничения (2) являются нелинейными, и что более важно, описывают невыпуклое множество допустимых управлений, которое представляет собой объединение двух координатных осей на плоскости. Построение выпуклой оболочки в данной задаче не конструктивно, так как любая нетривиальная линейная комбинация порождает пару управлений, соответствующих перекачке воды по одному водопроводу во встречных направлениях с положительными интенсивностями. Это означает, что часто употребляемый в теории управления подход, основанный на построении выпуклой оболочки невыпуклого множества управлений, к этой постановке неприменим, поэтому задача нахождения аналитического ответа является актуальной.

3. Набор уравнений динамического программирования в тензорной форме

В соответствии с подходом, предложенным в [19], был выведен набор уравнений динамическо-

го программирования для рассматриваемой задачи [22]:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\phi}(t, \mathbf{X})}{dt} = & -\min_{u \in U} \left\{ \left\langle \hat{\phi}(t), \left[A^1(t, u)X^1 \otimes X^2 \otimes \dots \otimes X^d + \right. \right. \right. \\ & X^1 \otimes A^2(t, u)X^2 \otimes \dots \otimes X^d + \dots + \\ & \left. \left. \left. X^1 \otimes X^2 \otimes \dots \otimes A^d(t, u)X^d \right] \right\rangle + \left\langle \mathbf{f}_0(t, u), \mathbf{X} \right\rangle \right\} = \\ & -\min_{u \in U} H(t, \hat{\phi}(t), u, \mathbf{X}) = -\mathcal{H}(t, \hat{\phi}, \mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3)$$

с терминальными условиями $\hat{\phi}(T) = \phi_0$ [2], [19], [26].

Для сокращения записи введем обозначения для неконтролируемых потоков каждого водохранилища

$$fl^l(t) = \lambda^l(t) - \mu^l(t) - w^l(t); \quad l = 1, 2, 3.$$

4. Нахождение минимума для правой части

Для рассматриваемого примера функция $\mathcal{H}(t, \hat{\phi}, \mathbf{X})$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, \hat{\phi}, \mathbf{X}) = & \min_{u \in U} \left\{ \phi_{i-1,j,k}(t) \mathbb{I}(i > 0) \left(\lambda^1(t) + u_{i,j,k}^{21}(t) \right) + \right. \\ & \phi_{i,j-1,k}(t) \mathbb{I}(j > 0) \left(\lambda^2(t) + u_{i,j,k}^{12}(t) + u_{i,j,k}^{32}(t) \right) + \\ & \phi_{i,j,k-1}(t) \mathbb{I}(k > 0) \left(\lambda^3(t) + u_{i,j,k}^{23}(t) \right) + \\ & \phi_{i,j,k}(t) \left(-\lambda^1(t) - \mu^1(t) - w^1(t) - 2u_{i,j,k}^{21}(t) - 2u_{i,j,k}^{12}(t) - \right. \\ & \lambda^2(t) - \mu^2(t) - w^2(t) - 2u_{i,j,k}^{32}(t) - 2u_{i,j,k}^{23}(t) - \\ & \left. \lambda^3(t) - \mu^3(t) - w^3(t) \right) + \\ & \phi_{i+1,j,k}(t) \mathbb{I}(i < N^1) \left(\mu^1(t) + w^1(t) + u_{i,j,k}^{12}(t) \right) + \\ & \phi_{i,j+1,k}(t) \mathbb{I}(j < N^2) \left(\mu^2(t) + w^2(t) + u_{i,j,k}^{21}(t) + u_{i,j,k}^{23}(t) \right) + \\ & \phi_{i,j,k+1}(t) \mathbb{I}(k < N^3) \left(\mu^3(t) + w^3(t) + u_{i,j,k}^{32}(t) \right) + \\ & \left(fl^1(t) + u_{i,j,k}^{21}(t) - u_{i,j,k}^{12}(t) \right)^2 + \\ & \left(fl^2(t) + u_{i,j,k}^{12}(t) - u_{i,j,k}^{21}(t) + u_{i,j,k}^{32}(t) - u_{i,j,k}^{23}(t) \right)^2 + \\ & \left. \left(fl^3(t) + u_{i,j,k}^{23}(t) - u_{i,j,k}^{32}(t) \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Тем не менее, для каждого фиксированного момента времени t и вектора состояния системы \mathbf{X} , описываемого индексами $\{i, j, k\}$, при выбранной топологии (см. рис. 1) возможны лишь четыре варианта:

$$\begin{aligned} u_{ijk}^{12}(t) = u_{ijk}^{23}(t) = 0; \\ u_{ijk}^{21}(t) = u_{ijk}^{23}(t) = 0; \\ u_{ijk}^{12}(t) = u_{ijk}^{32}(t) = 0; \\ u_{ijk}^{21}(t) = u_{ijk}^{32}(t) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим первый вариант, когда одновременно обнуляются управления $u_{ijk}^{12}(t) = u_{ijk}^{23}(t) = 0$. При

этих ограничениях число слагаемых уменьшается и функция $\mathcal{H}(t, \hat{\phi}, \mathbf{X})$ упрощается. Группируя слагаемые по степеням при управлениях, минимизируемая функция примет следующий вид

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \{ 2x^2 - 2xy + 2y^2 + a * x + b * y + c \}; \\ x = & u_{i,j,k}^{21}(t), y = u_{i,j,k}^{32}(t); \\ 0 \leq x \leq & u_{max}^{21}, 0 \leq y \leq u_{max}^{32}; \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$a = a_{i,j,k}^{21}(t) = -2\phi_{i,j,k}(t) + \phi_{i-1,j,k}(t) \mathbb{I}(i > 0) + \phi_{i,j+1,k}(t) \mathbb{I}(j < N^2) + 2fl^1(t) - 2fl^2(t); \quad (7)$$

$$b = b_{i,j,k}^{32}(t) = -2\phi_{i,j,k}(t) + \phi_{i,j-1,k}(t) \mathbb{I}(j > 0) + \phi_{i,j,k+1}(t) \mathbb{I}(k < N^3) + 2fl^2(t) - 2fl^3(t); \quad (8)$$

$$\begin{aligned} c = c_{i,j,k}(t) = & \phi_{i-1,j,k}(t) \mathbb{I}(i > 0) \lambda^1(t) + \\ & \phi_{i,j-1,k}(t) \mathbb{I}(j > 0) \lambda^2(t) + \\ & \phi_{i,j,k-1}(t) \mathbb{I}(k > 0) \lambda^3(t) - \\ & -\phi_{i,j,k}(t) [\lambda^1(t) + \lambda^2(t) + \lambda^3(t) + \\ & \mu^1(t) + \mu^2(t) + \mu^3(t) + w^1(t) + w^2(t) + w^3(t)] + \\ & \phi_{i+1,j,k}(t) \mathbb{I}(i < N^1) [\mu^1(t) + w^1(t)] + \\ & \phi_{i,j+1,k}(t) \mathbb{I}(j < N^2) [\mu^2(t) + w^2(t)] + \\ & \phi_{i,j,k+1}(t) \mathbb{I}(k < N^3) [\mu^3(t) + w^3(t)] + \\ & (fl^1(t))^2 + (fl^2(t))^2 + (fl^3(t))^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Очевидно и в остальных случаях, получаем квадратичную форму относительно двух переменных вида:

$$f(x, y) = \{ 2x^2 \pm 2xy + 2y^2 + a * x + b * y + c \}; \quad (10)$$

$$x, y \in [0, x_{max}] \times [0, y_{max}]$$

Знак второго слагаемого определяется “сонаправленностью” ненулевых управлений. Когда оба потока ориентированы различным образом по отношению к водохранилищу №2 (см. рис. 1), то используем знак минус, иначе – плюс.

Коэффициент c содержит слагаемые из (4), в которых никакие управления не входят, а следовательно, от выбора ограничений из (5) не зависит, а зависит только от времени и вектора состояния системы. Приведем выражения для вычисления оставшихся коэффициентов.

$$a_{i,j,k}^{12}(t) = -2\phi_{i,j,k}(t) + \mathbb{I}(i < N^1) \phi_{i+1,j,k}(t) + \mathbb{I}(j > 0) \phi_{i,j-1,k}(t) - 2fl^1(t) + 2fl^2(t); \quad (11)$$

$$b_{i,j,k}^{32}(t) = -2\phi_{i,j,k}(t) + \mathbb{I}(j < N^2) \phi_{i,j+1,k}(t) + \mathbb{I}(k > 0) \phi_{i,j,k-1}(t) - 2fl^2(t) + 2fl^3(t); \quad (12)$$

Выражения, необходимые для вычисления коэффициентов формулы (10) сведены в таблице 1.

Поскольку качественных отличий нет, разберем подробно нахождение минимума для функции, приведенной в уравнении (6) с коэффициентами (7)- (9),

Ограничение из (5)	знак в (10)	a	b
$u_{ijk}^{12}(t) = u_{ijk}^{23}(t) = 0$	–	a^{12}	b^{23}
$u_{ijk}^{21}(t) = u_{ijk}^{23}(t) = 0$	+	a^{21}	b^{23}
$u_{ijk}^{12}(t) = u_{ijk}^{32}(t) = 0$	+	a^{12}	b^{32}
$u_{ijk}^{21}(t) = u_{ijk}^{32}(t) = 0$	–	a^{21}	b^{32}

Таблица 1. Коэффициенты $\{a, b\}$ при различных ограничениях

а для остальных приведем только результаты. Найдем минимум по переменной x , используя y в качестве параметра. Вершина параболы $x^*(y) = -1/4a + 1/2y$. Она может находиться как внутри отрезка ограничений, так и вне его.

Предположим, что $x^*(y) < 0$. В этом случае минимум достигается в точке $x = 0$. Квадратичная форма (10) примет вид

$$f_1(x^*(y), y) = 2y^2 + b*y + c \quad (13)$$

Вершина параболы по второй переменной $y^* = -1/4b$, которая, в свою очередь может располагаться относительно отрезка $[0, y_{max}]$ тремя способами. В каждом из них наименьшее значение и условия несложно записать. Результаты приведены в строках ①-③ таблиц 2 и 3, и отображены на рисунках 4 и 5 в виде областей с тем же номером.

Если $0 \leq x^*(y) \leq x_{max}$, то наименьшее значение достигается в вершине $y^* = -1/6a - 1/3b$, а квадратичная форма (10) примет вид

$$f_2(x^*(y), y) = 3/2y^2 + (1/2a + b)y - 1/8a^2 + c. \quad (14)$$

Результаты приведены в строках ④-⑥ таблиц 2 и 3, и отображены на рисунках 4 и 5 в виде областей с тем же номером.

Последний, третий вариант $x^*(y) > x_{max}$, тогда наименьшее значение достигается на правой границе x_{max} , а квадратичная форма (10) принимает вид

$$f_3(x^*(y), y) = 2y^2 + (-2x_{max} + b)y + 2x_{max}^2 + ax_{max} + c, \quad (15)$$

а ее вершина по второй переменной $y^* = 1/2x_{max} - 1/4b$. Результаты приведены в строках ⑦-⑨ таблиц 2 и 3, и отображены на рисунках 4 и 5 в виде областей с тем же номером.

Всего получается девять областей в зависимости от значений коэффициентов a и b для сонаправленных потоков и девять для противоположных.

5. Процедура вычисления минимума правой части

Для нахождения численного решения необходимо на каждом шаге интегрирования для каждого состояния системы трех водохранилищ вычислять минимум правой части набора уравнений (3). Перед

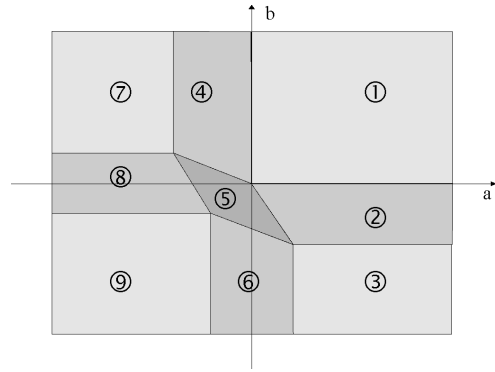


Рис. 4. девять областей для разнонаправленных по отношению к водохранилищу №2 потоках

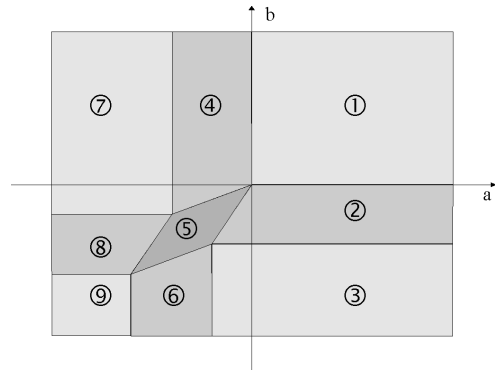


Рис. 5. девять областей для сонаправленных по отношению к водохранилищу №2 потоках

№ обл	Область	Минимум функции f^*	достигается в	
			x^*	y^*
①	$-1/4b < 0, -1/4a < 0$	c	0	0
②	$0 \leq -1/4b \leq y_{max};$ $-1/4a - 1/8b < 0$	$-1/8b^2 + c$	0	$-1/4b$
③	$-1/4b > y_{max};$ $-1/4a + 1/2y_{max} < 0$	$2y_{max}^2 + 2by_{max} + c$	0	y_{max}
④	$-1/6a - 1/3b < 0;$ $0 \leq -1/4a \leq x_{max}$	$-1/8a^2 + c$	$-1/4a$	0
⑤	$0 \leq -1/6a - 1/3b \leq y_{max};$ $0 \leq -1/3a - 1/6b \leq x_{max}$	$-1/6a^2 - 1/6ab - 1/6b^2 + c$	$-1/3a - 1/6b$	$-1/6a - 1/3b$
⑥	$-1/6a - 1/3b > y_{max};$ $0 \leq -1/4a + 1/2y_{max} \leq x_{max}$	$3/2y_{max}^2 + 1/2ay_{max} + by_{max} -$ $1/8a^2 + c$	$-1/4a + 1/2y_{max}$	y_{max}
⑦	$1/2x_{max} - 1/4b < 0;$ $x_{max} < -1/4a$	$2x_{max}^2 + ax_{max} + c$	x_{max}	0
⑧	$0 \leq 1/2x_{max} - 1/4b \leq y_{max};$ $x_{max} < -1/4a + 1/4x_{max} - 1/8b$	$3/2x_{max}^2 + 1/2bx_{max} + ax_{max} -$ $1/8b^2 + c$	x_{max}	$1/2x_{max} - 1/4b$
⑨	$1/2x_{max} - 1/4b > y_{max}$ $x_{max} < -1/4a + y_{max}$	$2x_{max}^2 - 2x_{max}y_{max} + 2y_{max}^2 +$ $ax_{max} + by_{max} + c$	x_{max}	y_{max}

Рис. 2. Области в пространстве коэффициентов $\{a, b\}$ при разнонаправленных по отношению к водохранилищу №2 потоках

№ обл	Область	Минимум функции f^*	достигается в	
			x^*	y^*
①	$-1/4b < 0, -1/4a < 0$	c	0	0
②	$0 \leq -1/4b \leq y_{max};$ $-1/4a + 1/8b < 0$	$-1/8b^2 + c$	0	$-1/4b$
③	$-1/4b > y_{max};$ $-1/4a - 1/2y_{max} < 0$	$2y_{max}^2 + 2by_{max} + c$	0	y_{max}
④	$1/6a - 1/3b < 0;$ $0 \leq -1/4a \leq x_{max}$	$-1/8a^2 + c$	$-1/4a$	0
⑤	$0 \leq 1/6a - 1/3b \leq y_{max};$ $0 \leq -1/3a + 1/6b \leq x_{max}$	$-1/6a^2 + 1/6ab - 1/6b^2 + c$	$-1/3a + 1/6b$	$1/6a - 1/3b$
⑥	$1/6a - 1/3b > y_{max};$ $0 \leq -1/4a - 1/2y_{max} \leq x_{max}$	$3/2y_{max}^2 - 1/2ay_{max} + by_{max} -$ $1/8a^2 + c$	$-1/4a - 1/2y_{max}$	y_{max}
⑦	$-1/2x_{max} - 1/4b < 0;$ $x_{max} < -1/4a$	$2x_{max}^2 + ax_{max} + c$	x_{max}	0
⑧	$0 \leq -1/2x_{max} - 1/4b \leq y_{max};$ $x_{max} < -1/4a + 1/4x_{max} - 1/8b$	$3/2x_{max}^2 - 1/2bx_{max} + ax_{max} -$ $1/8b^2 + c$	x_{max}	$-1/2x_{max} - 1/4b$
⑨	$-1/2x_{max} - 1/4b > y_{max}$ $x_{max} < -1/4a - y_{max}$	$2x_{max}^2 + 2x_{max}y_{max} + 2y_{max}^2 +$ $ax_{max} + by_{max} + c$	x_{max}	y_{max}

Рис. 3. Области в пространстве коэффициентов $\{a, b\}$ при сонаправленных по отношению к водохранилищу №2 потоках

выполнением процедуры численного интегрирования вычисляем значения ограничений для коэффициентов, используя известные пропускные способности водопроводов $x_{max} = u_{max}^{12} = u_{max}^{21}, u_{max} = u_{max}^{23} = u_{max}^{32}$. Эти значения одинаковы, не зависят ни от времени, ни от вектора состояния системы и вычисляются однократно. Подробнее о процедуре нахождения численного решения задачи в целом можно прочитать в работе [22].

Тем не менее, минимум правой части (4) необходимо вычислять в каждый момент времени для каждого возможного состояния системы водохранилищ. Это можно сделать следующим образом:

1. вычисляем четыре коэффициента $a^{12}, a^{21}, b^{23}, b^{32}$ по формулам (11), (7), (12) (8);
2. выбираем первую строку таблицы 1, определяем ненулевые управления и соответствующие им коэффициенты, вычисленные на первом шаге; так как в выбранной строке стоит знак минус, то используем таблицу 2, по значениям коэффициентов с помощью простых проверок геометрических ограничений определяем область, в которую попали их значения, а следовательно, значение минимума функции и координаты;
3. составляем вектор оптимальных управлений, обнуляя два управления, задействованных в ограничениях (2) и записанных в первом столбце выбранной строки таблицы 2, а два других являются найденными координатами минимума на предыдущем шаге:

$$u_{i,j,k}^*(t) = col(u_{i,j,k}^{12}(t), u_{i,j,k}^{21}(t), u_{i,j,k}^{23}(t), u_{i,j,k}^{32}(t)) = col(0, x^*, 0, y^*),$$

запоминаем значение минимума f^* ;

4. выбираем вторую строку таблицы 1; так как в выбранной строке стоит знак плюс, то используем таблицу 3, по значениям “необнуленных” коэффициентов определяем область, в которую попали их значения, а следовательно, значение минимума функции и координаты;
5. если значение минимума, полученного с этими коэффициентами меньше f^* , вычисленного по первой строке таблицы, то составляем новый вектор оптимальных управлений

$$u_{i,j,k}^*(t) = col(u_{i,j,k}^{12}(t), u_{i,j,k}^{21}(t), u_{i,j,k}^{23}(t), u_{i,j,k}^{32}(t)) = col(x^*, 0, 0, y^*),$$

и запоминаем обновление значение минимума f^* ; иначе оставляем вектор оптимальных управлений и значение минимума f^* без изменений;

6. шаги 4 и 5 повторяем по аналогии для третьей и четвертой строк таблицы 1.

В результате получаем значение минимума функции, которое используется для выполнения очередного шага метода Эйлера, а найденные управления сохраняются и становятся частью найденного численного решения поставленной задачи.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача управления связанной марковской цепью на примере системы связанных водохранилищ. Для нахождения оптимального управления необходимо найти численное решение набора уравнений динамического программирования. В силу специфики задачи эти уравнения содержат операцию минимизации в правой части, которую необходимо выполнять на каждом шаге интегрирования для каждого состояния системы. Кроме того, в задаче присутствуют нелинейные невыпуклые ограничения на множество управлений. Причем построение выпуклой оболочки этого множества неприменимо, что сделало задачу поиска аналитического ответа актуальной. Для примера системы трех водохранилищ найден аналитический ответ и построена процедура его вычисления на основе простых геометрических проверок, что существенно снижает вычислительную сложность задачи в целом. Результаты численного моделирования приведены в докладе.

Список литературы

- [1] B. Miller, G. Miller, and K. Siemenikhin, *Optimal control of Markov chains with constraints*, Proceedings of Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai: IEEE, December 16-18 2009, pp. 512–518.
- [2] Miller, B., Miller, G., and Siemenikhin, K.: *Towards the Optimal Control of Markov Chains with Constraints*, *Automatica*, vol. 46, pp. 1495–1502 (2010)
- [3] B. Miller, G. Miller, and K. Semenikhin, *Methods to design optimal control of markov process with finite state set in the presence of constraints*, *Automation and Remote Control*, vol. 72, no. 2, pp. 323–341 (2011)
- [4] Семенихин К.В. *Минимаксная линейная фильтрация случайных последовательностей с неточно заданной ковариационной функцией*, *Автоматика и телемеханика*, №2, с. 50–68, (2016)
- [5] A.V. Bosov, A.V. Borisov, K.V. Semenikhin. *Conditionally Minimax Prediction in Nonlinear Stochastic Systems*, 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems (MICNON-2015), June 24-26, 2015. Saint Petersburg, Russia, pp. 812-817

- [6] J. Filar and K. Vrieze, *Competitive Markov Decision Processes - Theory, Algorithms and Applications*. Springer, New York, USA, 1997.
- [7] B. K. Williams, *Markov decision processes in natural resources management: Observability and uncertainty*, Ecological Modelling, vol. 220, no. 6, pp. 830–840, 2009.
- [8] Piunovskiy, A., Clancy, D. *An explicit optimal intervention policy for a deterministic epidemic model*. Optim. Contr. Appl. Met. 29, 413–428 (2008)
- [9] B. Miller and D. McInnes *Optimal management of a two dam system via stochastic control: Parallel computing approach*, 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 12-15 Dec. 2011, Orlando, FL, pp. 1417–1423
- [10] Boris M. Miller, Daniel J. McInnes, *Management of dam systems via optimal price control*, Procedia Computer Science, vol. 4, 2011, pp. 1373–1382
- [11] D. McInnes and B. Miller, *Optimal control of time-inhomogeneous Markov chains with application to dam management*, 2013 3rd Australian Control Conference (AUCC), 4-5 November 2013, Perth, Australia, pp. 230–237
- [12] Степанян К.В., Попов А.К. *Программная реализация элементов тензорной алгебры для решения задач управления марковскими цепями с конечным множеством состояний*, Материалы XIX Международной конференции по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС"2015), 24-31 мая 2015 г., Алушта, АР Крым, с. 659–660
- [13] Степанян К., Miller В., Popov А. *Development of numerical procedure for control of connected Markov chains*, Труды 39-й междисциплинарной школы-конференции «Информационные технологии и системы 2015», 7 – 11 сентября, Олимпийская деревня, Сочи, Россия, с. 623–633.
- [14] A. Miller and B. Miller, *Application of stochastic control to analysis and optimization of TCP*, 2013 3rd Australian Control Conference (AUCC), 4-5 November 2013, Perth, Australia, pp. 238–243
- [15] Мясников Д.В., Семенихин К.В. *Управление параметрами одноканальной системы массового обслуживания при наличии ограничений*. Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. №6. С.76-94.
- [16] А.В. Борисов, Б.М. Миллер, К.В. Семенихин, *Фильтрация марковского скачкообразного процесса по наблюдениям мультивариантного точечного процесса*, Автоматика и телемеханика, № 2, pp. 34–60 (2015)
- [17] Б.М. Миллер, Г.Б. Миллер, К.В. Семенихин, *Регуляризация задачи оптимального управления марковским процессом с конечным числом состояний при наличии ограничений*, Автоматика и телемеханика (принято в печать).
- [18] Борисов А.В., *Применение алгоритмов оптимальной фильтрации для решения задачи мониторинга доступности удаленного сервера*, Информатика и ее применения, т. 8, № 3, с. 53-69 (2014)
- [19] Miller, B. M.: *Optimization of Queuing Systems via Stochastic Control*, Automatica, vol. 45, No 6, pp. 1423–1430 (2009)
- [20] Миллер А.Б. *Динамическое управление доступом и скоростью обслуживания при активных пользователях*. Сборник трудов конференции ИТИС"09 (Информационные технологии и системы 2009). ISBN 978-5-901158-11-1. С. 436–442.
- [21] Миллер А.Б. *Динамическое управление доступом и скоростью обслуживания при активных пользователях*. Автоматика и телемеханика. № 9, С. 70-82, (2010)
- [22] A. Miller, B. Miller, A. Popov and K. Stepanyan, *Towards the development of numerical procedure for control of connected Markov chains*, 2015 5th Australian Control Conference (AUCC), Gold Coast, QLD, 2015, pp. 336–341.
- [23] F. Delebecque and J. Quadrat, *Optimal control of markov chains admitting strong and weak interactions*, Automatica, vol. 17, no. 2, pp. 281–296 (1981)
- [24] A. Miller and B. Miller, *Control of connected Markov chains. Application to congestion avoidance in the Internet*, 2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Orlando, FL, 2011, pp. 7242–7248.
- [25] Alexander Miller and Boris Miller, *Towards the Analysis of TCP with the aid of Stochastic Control*, IX International Conference Systems Identification and Control Problems SICPRO, Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, January 30 to February 2, 2012, pp. 326–346
- [26] Elliott, R. J., Aggoun, L., and Moore, J. B.: *Hidden Markov Models. Estimation and Control*. New York: Springer Verlag (1995)